I.N.A. & E.N.S.A. 1984

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

PRÉLIMINAIRES

1° *a.* f désignant une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère le système

$$\begin{cases} f' = kf \\ f(0) = a \end{cases}$$

où k et a sont des réels donnés.

Démontrer que l'application $x \longmapsto ae^{kx}$ est l'unique application vérifiant ces conditions.

b. Soit t une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $T(x) = \int_0^x t(u)\,du$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que l'application $x \longmapsto ae^{T(x)}$ est l'unique application y vérifiant les conditions

$$\begin{cases} y' = ty \\ y(0) = a \end{cases}$$

2° Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, continues, admettant des densités notées respectivement f_1 et f_2, de fonctions de répartition F_1 et F_2.

a. On pose $Y = \sup(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de probabilité de Y.

b. On pose $Z = \inf(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de probabilité de Z.

PROBLÈME

I

1° On considère un événement aléatoire A susceptible de se produire à une date quelconque X à partir de la date 0, choisie pour origine (X prendra donc ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$). On suppose que la date X de l'événement est une variable aléatoire continue, admettant une densité f, de fonction de répartition F.

Soient $x \geqslant 0$ et $h > 0$. On désigne par q_x^{x+h} la probabilité que l'événement A se produise entre les dates x et $x + h$, sachant que A ne s'est pas produit avant la date x. (q_x^{x+h} s'appelle coefficient de survenance de l'événement A entre les dates x et $x + h$.)

a. Exprimer q_x^{x+h} en fonction de F.

b. Montrer que le rapport $\frac{1}{h} q_x^{x+h}$ tend vers une limite, que l'on notera $q(x)$, lorsque $h \to 0^+$.

c. Écrire la relation (R) liant q, f, et F.
[$q(x)$ s'appelle coefficient instantané de survenance de l'événement A].

2° Soit une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt.$$

a. Montrer que la relation (R) du 1° *c.* permet d'exprimer f et F en fonction de q et Q.

b. A quelle condition supplémentaire q doit-elle satisfaire pour que, aux fonctions f en F ainsi obtenues, corresponde une variable aléatoire X dont elles sont respectivement la densité et la fonction de répartition, et pour laquelle q sera alors le coefficient instantané de survenance de l'événement associé?

. . . / . . .

c. Soit $q(x) = q \in \mathbb{R}^{+*}$ (constante). Vérifier que la condition du *b.* est satisfaite et déterminer la loi de X.

d. Soit ici $q(x) = (qx)^r$ où $q \in \mathbb{R}^{+*}$
$r \in \mathbb{R}^{+}$

Vérifier que la condition du *b.* est satisfaite et déterminer la loi de X.

II

L'événement A considéré ici est la survenance d'une avarie sur un matériel. $q(x)$ désigne le coefficient instantané de survenance d'une avarie à la date x.

On note $Q(x) = \int_0^x q(t)\, dt$.

Lorsqu'une avarie se produit, on remplace le matériel par un matériel neuf qui est soumis à partir de la date de remplacement au même risque d'avarie que le matériel précédent l'a été à partir de la date 0.

1° On a $q(x) = q$ (constante), où $q \in \mathbb{R}^{+*}$. On dira alors que l'appareil ne subit pas le phénomène du vieillissement.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire égale à l'intervalle de temps X séparant deux avaries consécutives?
Calculer E(X) et V(X).

b. On suppose que $\mathfrak{M}$ désigne un matériel complexe constitué de n matériels élémentaires fonctionnant simultanément en parallèle et soumis, chacun indépendamment des autres, au même risque d'avarie. Un matériel élémentaire subissant une avarie n'est pas remplacé et s'arrête de fonctionner. On dira que $\mathfrak{M}$ subit une avarie lorsque tous les matériels élémentaires sont arrêtés. $\mathfrak{M}$ est alors remplacé intégralement et recommence à fonctionner selon les mêmes conditions.

X_i, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, désigne la variable aléatoire égale à la date de survenance de la première avarie du i^e matériel élémentaire. X désigne la variable aléatoire égale à l'intervalle de temps séparant deux avaries consécutives du matériel $\mathfrak{M}$.

Exprimer X en fonction de $X_1, \ldots, X_n$ et exprimer la fonction de répartition et la densité de probabilité de X (utiliser le préliminaire).

En déduire le coefficient de survenance instantané d'une avarie pour le matériel complexe et la durée de vie médiane du matériel complexe (la médiane d'une variable aléatoire de fonction de répartition F est le nombre M tel que $F(M) = \frac{1}{2}$).

c. Répondre aux questions de II. 1° *b.* dans le cas où le matériel complexe est formé de n matériels élémentaires placés en série et où une avarie apparaît dans le matériel complexe dès qu'une avarie apparaît sur un matériel élémentaire au moins.

2° On suppose $q(x) = (qx)^2$ où $q \in \mathbb{R}^{+*}$.

Reprendre les questions II. 1° *a.*, II. 1° *b.*, II. 1° *c.*

Application : Donner les résultats obtenus en II. 2° *a. b. c.* pour $q = 0{,}01$ $n = 5$.